RELATION GENERALE AU CALCUL DES CONDUITES COULANTS EN CHARGE ET A SURFACE LIBRE

علاقة عامة لحساب الأنابيب ذات سيلان مضغوط و حر

LAKEHAL Moussa Doctorant en sciences hydrauliques, Université de Biskra BP 145 RP 07000. moussalll@yahoo.fr

ACHOUR Bachir Professeur à l'université de Biskra. Université de Biskra BP 145 RP 07000. *Laboratoire de Recherche en Hydraulique Souterraine et de Surface (LARHYSS)* info@larhyss.net

Résumé : Notre étude s'intéresse à proposer une relation théorique générale pour le calcul des conduites en charge et à surface libre. Pour le cas des conduites coulants à surface libre, notre étude montre que le paramètre de dimension D_{h0} varie dans un intervalle de valeurs relativement restreint. En suggérant de remplacer cet intervalle de valeur par sa moyenne géométrique, il a été possible d'établir une relation généralisée applicable à la fois aux cas des écoulements à surface libre et en charge en conduites circulaires. Afin d'examiner l'importance des écarts obtenus sur le calcul de la conductivité $Q/J^{1/2}$ après l'introduction d'une valeur moyenne géométrique, nous avons évalué l'erreur relative maximale commise sur le calcul de la conductivité en utilisant toutes les rugosités relatives $\square/D_h$ qui ont servies au tracé du diagramme de *Moody*. Les résultats obtenus montrent que l'erreur relative maximale est égale à 1,65 %, correspondant à la rugosité relative maximale $\square/D_h$=5 10^{-2}.

Avant l'établissement de cette relation généralisée, nous avons suggéré, d'abord, une nouvelle approche théorique pour le calcul des écoulements uniformes dans le domaine turbulent rugueux, en se basant sur les relations universelles de *Nikuradse* et de *Darcy – Weisbach*.

Le caractère implicite de la relation obtenue nous a conduit, par un ajustement adéquat, à la remplacer par une équation simplifiée et pratique.

Mots–clés : Ecoulement uniforme, Conduites circulaires, Conductivité.

الملخص :هذه الدراسة تهدف إلى اقتراح علاقة عامة لحساب الأنابيب ذات سيلان مضغوط و حر. بالنسبة للأنابيب ذات سيلان حر، دراستنا أثبتت بأن عامل القياس D_{h0} يتغير ضمن مجال قيم ضيقة نسبيا. باقتراح تغيير مجال القيم هذا بمعدله الهندسي، أمكن إنشاء علاقة معممة قابلة للتطبيق في نفس الوقت لحالات السيلانات الحرة و المضغوطة في الأنابيب الدائرية.

لاختبار أهمية الفروق الحاصلة على حساب الناقلية $Q/J^{1/2}$ بعد إدخال قيمة متوسطة هندسية، قمنا بتقييم الخطأ النسبي الأقصى المرتكب على حساب الناقلية و هذا باستعمال كل الخشونات النسبية $\square/D_h$ التي استعملت لرسم منحنى مودي. النتائج المحصل عليها أثبتت أن الخطأ الأقصى يساوي 1,65 % المقابل للخشونة النسبية القصوى $\square/D_h$=5 10^{-2}. قبل إنشاء هذه العلاقة المعممة،قمنا أولا باقتراح نظرية تقريبية جديدة لحساب السيلانات المنتظمة في الـمجال الهائج الخشن و ذلك باستعمال علاقات نيكورادزي و دارسي-فيزباك المعروفة كعلاقات قاعدية.

الطابع الغير مباشر للعلاقة الناتجة دفعتنا لتعويضها عبر تعديل مناسب بعلاقة مبسطة و تطبيقية.

الكلمات الجوهرية : سيلان منتظم، مجال هائج خشن، أنابيب دائرية، ناقلية.

INTRODUCTION

Le calcul des écoulements uniformes à surface libre ou en charge occupe une place importante dans la pratique de l'ingénieur hydraulicien. Un écoulement est considéré comme étant uniforme lorsque ses caractéristiques sont invariables dans le temps et dans l'espace. Ces caractéristiques sont la profondeur h de l'écoulement appelée aussi profondeur normale, l'aire de la section mouillée A, la vitesse moyenne V de l'écoulement et le débit volume Q.

La relation la plus largement utilisée pour le calcul de la profondeur normale est celle de *Manning* (1891) – *Strickler* (1923) ($V = kR_h^{2/3}J^{1/2}$) en raison de sa forme simplifiée et aux résultats satisfaisant aux quels elle aboutit. Cette relation exprime de manière approximative la vitesse moyenne V sous l'hypothèse d'un régime turbulent. Ce régime doit être considéré non seulement comme étant turbulent, mais aussi comme étant rugueux en raison du fait que l'effet des forces dues à la viscosité est laissé hors considération. Où R_h est le rayon hydraulique, J est la pente géométrique du canal et k est le coefficient de la résistance de l'écoulement de *Strickler*. Il est à rappeler que le coefficient k est tel que $k = 1/n$, où n est le coefficient de rugosité de *Manning*.

Une autre relation est celle de *Darcy* (1854) –*Weisbach* (1845) qui s'écrit : $J = f\,V^2/(2gD_h)$ où f est le coefficient de frottement, D_h est le diamètre hydraulique du canal et g est l'accélération de la pesanteur.

Le calcul du coefficient de frottement f, en régime turbulent rugueux, peut se faire par application de la formule de *Nikuradse*, soit $f^{-1/2} = -2\,log\left(\dfrac{\varepsilon/D_h}{3{,}7}\right)$.

En conduites circulaires, l'écoulement uniforme en charge ou à surface libre dans le domaine turbulent rugueux est régi par la relation fonctionnelle □ tel que □(Q, D, J, □, □)=0, avec Q est le débit volume, D est le diamètre de la conduite, J est le gradient de la perte de charge, □ est la rugosité absolue et □=h/D est le taux de remplissage de la conduite circulaire. La catégorie des problèmes la plus rencontrée dans la pratique est celle qui répond à un besoin de dimensionnement, la relation □ devient donc □$_D$ tel que D=□$_D$(Q, J, □, □). Notre étude théorique a permis d'exprimer, de manière pratique, cette dernière relation en combinant les relations de *Darcy – Weisbach* et de *Nikuradse* sous sa forme modifiée. L'objectif principal de notre étude était donc d'établir d'abord une approche théorique au calcul des écoulements uniformes dans le domaine turbulent rugueux, qui demeure selon plusieurs auteurs le régime le plus répondu dans la pratique, et puis d'appliquer cette approche au cas des conduites circulaires en charge et à surface libre et enfin d'aboutir à une relation générale unique permettant à la fois la détermination du diamètre de la conduite lorsque l'écoulement est en charge et à surface libre.

APPROCHE THEORIQUE AU CALCUL DES ECOULEMENTS UNIFORMES DANS LE DOMAINE TURBULENT RUGUEUX

La transformation de la formule de *Nikuradse* ($f^{-1/2}$ = -2log(□/D_h/3,7)) a permis d'écrire :

$$f^{-1/2} = \beta\ D_h^{0,15} \tag{1}$$

Où f est le coefficient de frottement est D_h représente le diamètre hydraulique du profil liquide en écoulement et le paramètre □ dépend de la rugosité absolue □des parois de la

conduite ou du canal considéré.
La combinaison de la relation (1) avec celle de *Darcy* - *Weisbach* ($J=fV^2/2gD_h$) a abouti à une nouvelle relation de la vitesse proche par sa forme de celle proposée par *Strickler* mais une différence notable a été observée dans l'expression du coefficient de résistance de l'écoulement k. Cette relation s'écrit :

$$V = k\, R_h^{0,65} \sqrt{J} \qquad (2)$$

Où V représente la vitesse moyenne de l'écoulement, k est le coefficient de résistance de l'écoulement au sens de *Strickler*, $R_h=D_h/4$ est le rayon hydraulique et J est le gradient de la perte de charge. Avec k est exprimé comme suit :

$$k = \frac{2^{2,8}\sqrt{g}}{D_h^{0,15}} \log\left(\frac{3,7}{\varepsilon / D_h}\right) \qquad (3)$$

La relation (3) diffère de celle proposée par *Hager* (1987) (k□$^{1/6}/8,2J^{1/2}=1$) qui suggère que le coefficient k varie seulement en fonction de la rugosité □. Or, notre développement montre que k varie non seulement en fonction de □ mais aussi et surtout en fonction de la profondeur de l'écoulement représentée dans la relation (3) par D_h.
La vitesse moyenne dans une section transversale, d'après l'équation de continuité, s'écrit $V=Q/A$ et le rayon hydraulique par définition est $R_h=A/P$. A est l'aire de la section mouillée et P représente le périmètre mouillé de cette section. A et P peuvent être exprimés pour un profil géométrique quelconque sous la forme suivante (*Achour*, *Bedjaoui*, *Khattaoui*, *Debabeche*, 2002 ; *Gali*, 2002) :

$$A=a^2A_1 \qquad (4)$$

$$P=aP_1 \qquad (5)$$

Où a est dimension linéaire quelconque liée au profil liquide en écoulement, elle peut être à titre d'exemple le diamètre D d'une conduite circulaire. Les paramètres A_1 et P_1 désignent respectivement l'aire de la section mouillée A et le périmètre mouillé P lorsque a est égale à l'unité.
Tenant de toutes ces considérations, la relation (2) s'écrit :

$$a = \left[\frac{Q}{k\sqrt{J}}\right]^{\frac{1}{2,65}} \frac{P_1^{0,245}}{A_1^{0,623}} \qquad (6)$$

Cette dernière relation peut s'écrire plus simplement :

$$a=\text{□}a_0 \qquad (7)$$

Avec :

$$\Lambda = \left[\frac{Q}{k\sqrt{J}}\right]^{\frac{1}{2,65}} \qquad (8)$$

$$a_0 = \frac{P_1^{0,245}}{A_1^{0,623}}$$

(9)
Le paramètre □ représente la longueur fluido-dynamique et a_0 est un paramètre de dimension de la dimension linéaire.
Par analogie à la relation (7) le diamètre hydraulique D_h peut s'écrire :
$D_h=$□D_{h0} (10)

Remplaçant la relation (3) dans (6) et tenant compte de la relation (10) :

$$\frac{Q}{\sqrt{J}}=\frac{2^{2,8}\sqrt{g}}{D_{h0}^{0,15}}\Lambda^{5/2}\log\left(3,7\Lambda\frac{D_{h0}}{\varepsilon}\right) \tag{11}$$

La relation (11) représente la relation générale régissant l'écoulement uniforme en régime turbulent rugueux, elle est applicable pour tout profil géométrique connu.
Le paramètre de dimension Dh_0 s'exprime :

$$D_{h0}=4\left(\frac{\sqrt{A_1}}{P_1}\right)^{0,755} \tag{12}$$

APPLICATION A LA CONDUITE CIRCULAIRE

Conduite partiellement occupée par l'écoulement (écoulement à surface libre)

La figure 6 montre un profil circulaire de diamètre D partiellement occupé par un écoulement de profondeur h. Le segment circulaire est défini par le paramètre de forme $\xi=h/D$. Celui-ci est lié au demi angle au centre θ par la relation suivante :

$$\theta=\cos^{-1}(1-2\xi) \tag{13}$$

Ce profil est donc défini par deux dimensions linéaires h et D. L'aire de la section mouillée A ainsi que le périmètre mouillé P s'écrivent respectivement comme suit :

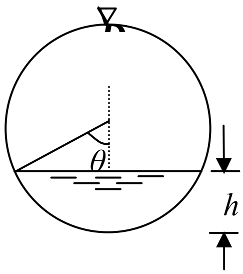

Fig. 1. Schéma de définition du profil circulaire

$$A=\frac{D^2}{4}(\theta-\sin\theta\cos\theta) \tag{14}$$

$$P=D\theta \tag{15}$$

Où θ est exprimé en radians. En considérant pour dimension linéaire $a=D$, on peut écrire que :

$$A_1=\frac{1}{4}(\theta-\sin\theta\cos\theta) \tag{16}$$

$$P_1=\theta \tag{17}$$

Remplaçant les relations (16) et (17) dans la relation (12) on trouve la relation du paramètre D_{h0} :

$$D_{h0}=2^{1,245}\left(\frac{\sqrt{\theta-\sin\theta\ \cos\theta}}{\theta}\right)^{0,755} \tag{18}$$

La conductivité de la conduite s'exprime en tenant compte de cette dernière relation :

$$\frac{Q}{\sqrt{J}}=6,119\sqrt{g}\,\frac{\theta^{0,113}}{(\theta-\sin\theta\cos\theta)^{0,057}}\Lambda^{5/2}\log\left[8,77\left(\frac{\sqrt{\theta-\sin\theta\cos\theta}}{\theta}\right)^{0,755}\frac{\Lambda}{\varepsilon}\right] \tag{19}$$

Ou bien en termes adimensionnels :

$$\frac{Q}{\sqrt{Jg\varepsilon^5}}=6,119\frac{\theta^{0,113}}{(\theta-\sin\theta\cos\theta)^{0,057}}\left(\frac{\Lambda}{\varepsilon}\right)^{5/2}\log\left[8,77\left(\frac{\sqrt{\theta-\sin\theta\cos\theta}}{\theta}\right)^{0,755}\frac{\Lambda}{\varepsilon}\right] \tag{20}$$

Si la dimension linéaire à recherchée est le diamètre de la conduite $a=D$, le paramètre de dimension $D_0=a_0$ s'écrit :

$$D_0=\frac{P_1^{0,245}}{A_1^{0,623}}=\frac{\theta^{0,245}}{[(\theta-\sin\theta\cos\theta)/4]^{0,623}} \tag{21}$$

Et le paramètre de dimension de la profondeur normale s'écrit :

$$h_0=\xi D_0=\frac{\xi\theta^{0,245}}{[(\theta-\sin\theta\cos\theta)/4]^{0,623}} \tag{22}$$

Par analogie à la relation (7), le diamètre D peut être déterminé par la relation suivante :

$$D=\square D_0 \tag{23}$$

La profondeur normale h est :

$$h=\square D \tag{24}$$

Ainsi, le diamètre d'une conduite coulant à surface libre peut être déterminée directement par application de la relation (23) pour n'importe quel taux de remplissage. Rappelons que les paramètres □ et D_0 peuvent être déterminés respectivement par application des relations (20) et (21).

Conduite entièrement occupée par l'écoulement (écoulement en charge)

La conduite entièrement occupée par l'écoulement (écoulement en charge) est caractérisée par un taux de remplissage □=1, les équations (13), (16), (17), (18), (21) et (22) mènent à écrire respectivement que : □=□, A_1=□/4, P_1=□, $D_{h0}=1,539$, $D_0=1,539$ et $h_0=1,539$.
Par conséquent le diamètre de la conduite en charge est :

$$D=1,539\square \tag{25}$$

La longueur L est donnée par la relation suivante :

$$\frac{Q}{\sqrt{J}}=6,528\sqrt{g}\,\Lambda^{5/2}\log\left(5,695\frac{\Lambda}{\varepsilon}\right) \tag{26}$$

Ou bien en termes adimensionnels :

$$\frac{Q}{\sqrt{gJ\varepsilon^5}}=6,528\left(\frac{\Lambda}{\varepsilon}\right)^{5/2}\log\left(5,695\frac{\Lambda}{\varepsilon}\right) \tag{27}$$

ETUDE DE LA FONCTION $D_{h0}=f(\ \ )$

La représentation graphique (figure 2) de la relation (18) montre que le paramètre de dimension D_{h0} présente un maximum pour une valeur du paramètre de forme $\xi = 1/2$. Cette valeur a pu être aisément déterminée en égalant à zéro la dérivée $dD_{h0}/d\xi$.

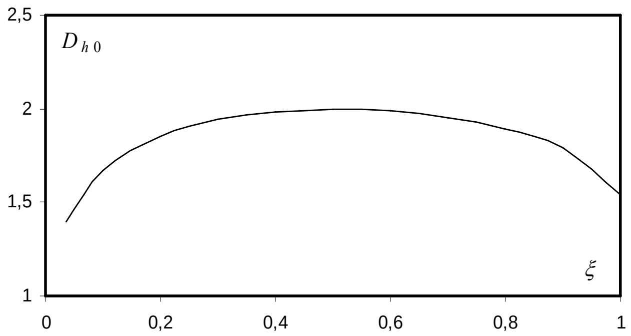

Fig. 2. Relation Paramètre de dimension D_{h0} - Paramètre de forme ξ selon la relation (18).

A la valeur minimale D_{h0} min. = 1,4 correspond la valeur θ = 0,383 radians et ξ = 0,036 (valeur pratique minimale). Par contre, à la valeur maximale D_{h0} max. = 2 correspond à θ = 1,5708 radians et ξ = 1/2.

RELATION GENERALE AU CALCUL DES CONDUITES EN CHARGE ET A SURFACE LIBRE

Afin d'établir une formule générale unique au calcul de l'écoulement uniforme turbulent rugueux, pour les conduites en charge et à surface libre, nous avons affecté au paramètre de dimension D_{h0} la moyenne géométrique calculée dans son domaine de variation [1,4 ; 2] :

$$D_{h0} = \sqrt{1,4.2} = 1,673 \approx \frac{5}{3} .$$

En remplaçant D_{h0} par sa valeur moyenne géométrique D_{h0}=1,673 dans la relation générale (11), il ressort que :

$$\varphi = \frac{Q}{\sqrt{g\,J\,\varepsilon^5}} = 6,447\left(\frac{\Lambda}{\varepsilon}\right)^{5/2} \log\left(6,2\ \frac{\Lambda}{\varepsilon}\right) \qquad (28)$$

Cependant, il faut noter que l'introduction d'une valeur moyenne géométrique peut impliquer des erreurs sur le calcul de Λ et de la conductivité $Q/\sqrt{J}$. Pour examiner l'importance des écarts obtenus lors du calcul de ce dernier paramètre, nous avons évalué dans ce qui suit l'erreur relative maximale sur la valeur calculée la conductivité $Q/\sqrt{J}$.

Calcul de l'erreur relative maximale commise sur le calcul de la conductivité

Afin de calculer l'erreur relative maximale commise sur le calcul de la conductivité, nous devons faire appel à la relation (11) :

$$\frac{Q}{\sqrt{J}}=\frac{2^{2.8}\sqrt{g}}{D_{h0}^{0,15}}\Lambda^{5/2}\log\left(\frac{\Lambda D_{h0}\,3,7}{\varepsilon}\right)$$

Nous procédons à dérivée de la conductivité $Q/\sqrt{J}$ par rapport à D_{h0} :

$$\delta\left(\frac{Q}{\sqrt{J}}\right)=\frac{\Delta\left(\frac{Q}{\sqrt{J}}\right)}{\frac{Q}{\sqrt{J}}}=\frac{\frac{\delta}{\delta D_{h0}}\left(\frac{Q}{\sqrt{J}}\right)}{\frac{Q}{\sqrt{J}}}\Delta D_{h0} \qquad (29)$$

Soit :

$$\delta\left(\frac{Q}{\sqrt{J}}\right)=\frac{\Delta D_{h0}}{D_{h0}}\left[\frac{0,434}{\log\left(\frac{3,7}{\varepsilon/D_h}\right)}-0,15\right] \qquad (30)$$

$D_{h0}=\frac{5}{3}$, correspondant à la moyenne géométrique de l'intervalle (1,4 ÷ 2).

ΔD_{h0}, est l'écart maximal, soit : $\Delta D_{h0}=2-\frac{5}{3}=\frac{1}{3}$.

En tenant compte de ces considérations, la relation (30) s'écrit :

$$\delta\left(\frac{Q}{\sqrt{J}}\right)=f\left(\varepsilon/D_h\right)\,\Delta D_{h0} \qquad (31)$$

Avec :

$$f\left(\varepsilon/D_h\right)=\frac{3}{5}\left[\frac{0,434}{\log\left(\frac{3,7}{\varepsilon/D_h}\right)}-0,15\right]$$

La relation (31) montre que l'erreur relative commise sur le calcul de la conductivité $Q/\sqrt{J}$ est fonction de la rugosité relative □/D_h. Pour calculer $\delta\left(\frac{Q}{\sqrt{J}}\right)$, nous avons considéré toutes les valeurs de □/D_h qui ont servies au tracé du diagramme de *Moody.* Le calcul montre que l'erreur relative maximale est égale à 1,65 %, correspondant à la rugosité relative maximale ε/D_h =5 10^{-2}. Ainsi, la valeur calculée de l'erreur relative maximale n'a pas une influence importante sur le calcul de la conductivité, ce qui permet d'adopter la moyenne géométrique du paramètre de dimension D_{h0} pour le calcul des conduites

circulaires en charge et à surface libre lorsque l'écoulement est dans le domaine turbulent rugueux.
La figure 3 montre la variation de l'erreur relative $\delta\left(Q/\sqrt{J}\right)$ en pourcentage en fonction de la rugosité relative ε/D_h .

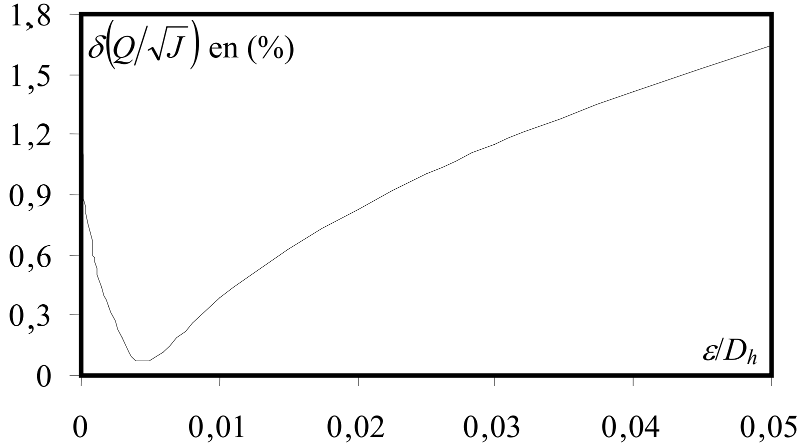

Fig. 3. Relation $\delta\left(Q/\sqrt{J}\right)$ - ε/D_h

Cependant, l'application de la relation généralisée (28) nécessite l'utilisation d'un procédé itératif. L'ajustement, de type puissance, de cette dernière relation nous a donné une formule simple et explicite applicable pour $\Lambda/\varepsilon \geq 50$ avec une erreur relative maximale <1,3% :

$$\frac{\Lambda}{\varepsilon}=0{,}4103\,\varphi^{0{,}7631} \qquad (32)$$

Avec : $\varphi = \dfrac{Q}{\sqrt{g\,J\,\varepsilon^5}}$.

Ainsi, lorsqu'il s'agit de répondre à un besoin de dimensionnement d'une conduite coulant en charge ou à surface libre et pour le domaine turbulent rugueux, il suffit d'appliquer la relation généralisée (32) et ainsi les relations explicites (23) et (21).

CONCLUSION

Notre étude s'est intéressée à examiner la possibilité d'aboutir à une relation généralisée, permettant le dimensionnement des conduites coulant en charge et à surface libre, pour des conditions d'un écoulement uniforme dans le domaine turbulent rugueux, qui demeure selon plusieurs auteurs le régime le plus répandu dans la pratique.

La combinaison de la relation de *Nikuradse* sous sa forme modifiée avec celle de *Darcy – Weisbach*, nous a permis d'établir une relation générale régissant l'écoulement uniforme dans le domaine turbulent rugueux.

Notre développement théorique à permet par la suite de proposer deux relations, l'une pour le cas des conduites coulant à surface libre et l'autre pour le cas des conduites en charge.

L'étude de la fonction du paramètre de dimension D_{h0} nous a conduit enfin à établir la formule généralisée pour le calcul des écoulements uniformes en charge et à surface libre dans les conduites circulaires. Le calcul montre que l'erreur relative maximale commise sur la conductivité, après l'introduction d'une valeur moyenne géométrique de D_{h0}, n'a pas une influence importante sur le calcul de cette conductivité.

Le caractère implicite de la relation obtenue nous a conduit, par un ajustement adéquat, à la remplacer par une équation simplifiée et pratique.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Achour, B., Bedjaoui, A., Khattaoui, M., Debabeche M., 2002 *Contribution au calcul des écoulements uniformes à surface libre et en charge*, LARHYSS Journal, Biskra, N°.01, pp. 7-36.

Darcy, H., 1854 *Sur des recherches expérimentales relatives au mouvement des eaux dans les tuyaux*, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Vol.38, pp. 1109-1121, Paris.

Gali, B., 2002 Contribution à l'étude de l'écoulement uniforme, à surface libre et en charge, Thèse de Magister en sciences hydrauliques, université de Batna.

Hager, W.H., 1987 *Die Berechnung turbulenter Rohrströmungen*, 3R-International, Vol. 26, Heft 2, pp. 116-121.

Manning, R., 1891 *On the flow of water in open channels and pipes*, Transactions, Institution of Civil Engineers of Ireland, Vol. 20, pp. 161-207, Dublin.

Strickler, A., 1923 Beiträge zur Frage der Geschwindigkeitsformel und der Rauhigkeitszahlen für Ströme, Kanäle und geschlossene Leitungen, Mitteilungen des eidgenössischen Amtes für Wasserwirtschaft, N°16, Bern.

Weisbach, J., 1845 Lehrbuch der Ingenieur und Maschinenmechanik, Brunswick, Germany.